

# ELEMENTI DI ALGEBRA BOOLEANA

**CONCETTO DI LOGICA:** elemento essenziale del pensiero umano.

La logica permette all'uomo di formulare ragionamenti e di elaborare informazioni.

La logica è esprimibile con il linguaggio binario.

Le frasi del linguaggio della logica prendono il nome di

**proposizioni logiche** o, più semplicemente, **proposizioni**.

**In logica si chiama proposizione ogni frase per la quale ha senso dire che è “vera”, o è “falsa”.**

La logica delle proposizioni è anche detta logica **bivalente** proprio perché ogni proposizione può avere uno solo dei due valori: *vero* o *falso*.

## Esempi

**Per esempio**, le frasi:

A) Potenza si trova in Basilicata;

B) 5 è un numero dispari;

C) Matera si trova in Puglia;

**sono proposizioni logiche**, perché possiamo dire con certezza che le frasi **A** e **B** sono vere, mentre **C** è falsa.

Ogni frase ha un valore di **verità o falsità**, nessuna ambiguità.

**Per esempio**, la frase:

D) che bella l'Informatica;

**non è una proposizione logica** perché non possiamo dire se è vera o falsa. Può essere una proposizione vera solo per chi ama l'Informatica, ma non per tutti. **La verità o la falsità della frase dipendono solo dalle emozioni soggettive.**

## Applicazioni dell'algebra booleana

L'algebra delle proposizioni è detta anche **ALGEBRA BOOLEANA** (matematico inglese, George **Boole**, 1854).

In Informatica, l'algebra di Boole trova **applicazioni** in diversi settori:

1. è la logica di cui si avvalgono i calcolatori per interpretare ed eseguire le istruzioni dei programmi;
2. è la logica usata nella progettazione e per il funzionamento dei circuiti elettronici;
3. è utilizzata nello studio dei sistemi elettronici digitali che fanno parte di un computer;
4. nei linguaggi di programmazione, per esprimere scelte in base a dei criteri di selezione, nella sequenza di esecuzione delle istruzioni di un programma;
5. rappresenta uno strumento matematico su cui si basano i sistemi digitali, che utilizzano variabili che possono avere solo uno di due valori: **1 (Vero)** o **0 (Falso)**.



# Algebra booleana

Gli elementi di un'algebra booleana possono essere **astratti** o **concreti**; ad esempio possono essere numeri, proposizioni, insiemi o reti elettriche.

Di solito, gli elementi considerati sono **proposizioni**, o semplici dichiarazioni, aventi la caratteristica di poter essere **o vere o false**, con la **completa esclusione di casi ambigui**.

La logica booleana consiste di tre operatori logici di base:

**OR**

**AND**

**NOT**

Una variabile logica (o booleana) è una variabile che può assumere solo uno di due valori (**valori di verità**):

**VERO** - simboli alternativi: **true, 1, ON, SI**

**FALSO** - simboli alternativi: **false, 0, OFF, NO**

# Concetti

Vengono definiti i seguenti concetti:

- *variabili booleane*
- *operatori booleani*
- *porte logiche*

## Variabili booleane

Una variabile booleana è una variabile binaria che può assumere esclusivamente due valori logici che saranno denotati con 0 e 1, oppure V e F.

Se  $x$  è una variabile booleana, vale quindi la seguente definizione:

$x = 0$     se     $x \neq 1$

$x = 1$     se     $x \neq 0$

# Operatori booleani

Si definiscono gli operatori booleani o logici fondamentali:

**NOT** Negazione Logica, o COMPLEMENTAZIONE

**AND** Prodotto Logico, o CONGIUNZIONE

**OR** Somma Logica, o DISGIUNZIONE

La verità o la falsità di una variabile booleana sono dette **VALORI DI VERITÀ**: una variabile può essere vera o falsa, ma non entrambe le cose.

Le operazioni sono rappresentate da opportune **tabelle di verità**.

**Esempio** di proposizione semplice:

**A**: Potenza è una città;

**B**: Basilicata è una regione.

**Esempio** di proposizione composta:

**C**: Potenza è una città **AND** Basilicata è una regione.

Proposizione composta, ottenuta operando sulle proposizioni **A** e **B** per mezzo dell'operatore **AND**. Il valore di verità di **C** dipende dai valori delle due proposizioni.

L'operazione binaria che da come risultato il valore di verità **C** si chiama **congiunzione**.

# Tavola di verità

Una espressione complessa ha bisogno di parentesi per indicare l'ordine di applicazione degli operatori. L'algebra booleana prevede delle **priorità di applicazione**: prima si applica l'operatore **NOT**, poi **AND** e infine **OR**.

L'espressione **A OR NOT B AND C** equivale all'espressione **A OR ((NOT B) AND C)**.

L'espressione **(A OR (NOT B)) AND C** non rappresenta la stessa funzione della precedente. Come si può dimostrare questo fatto? Un metodo è quello di applicare l'**induzione perfetta**. Questa regola prevede che due formule sono equivalenti se hanno lo stesso valore di verità per qualsiasi valore di verità associato alle variabili che le costituiscono.

Per verificare che due espressioni **A e B sono equivalenti ( $A \equiv B$ )** si devono quindi esaminare tutti i possibili valori di verità delle variabili costituenti A e B e controllare che i valori di verità delle proposizioni A e B coincidano in ogni circostanza.

Questo viene fatto con le cosiddette **tabelle di verità**. Le tabelle di verità associano a ogni combinazione dei valori di verità delle variabili di una espressione, i valori di verità dell'espressione stessa.

# NOT

## Negazione o Complementazione

**Operazione unaria** che restituisce il valore logico opposto a quello della variabile di ingresso.

Per rappresentare il complemento di una variabile  $x$  vengono usate varie notazioni:

$$\text{not}(x)$$
$$\overline{x}$$

Rappresentazione dell'operazione **not(x)** con la tavola della verità:

<b>x</b>	<b>not(x)</b>
V	F
F	V

oppure

<b>x</b>	<b>not(x)</b>
0	1
1	0

*Proprietà:*

$$\text{not}(\text{not}(x)) = x$$

Le tavole di verità sono tabelle matematiche utilizzate come principale rappresentazione di una **funzione booleana**, per determinare se, attribuiti i **valori di verità** alle proposizioni che la compongono, una determinata proposizione è VERA o FALSA.

# AND

## Prodotto Logico (AND)

L'operazione di prodotto logico fra due (o più) variabili fornisce il valore logico 1 se e solo se **tutte** le variabili assumono valore logico 1.

Per rappresentare il prodotto logico di due variabili  $x$  e  $y$  si usa la notazione:

$x \text{ and } y$

$x \cdot y$

$x y$

Rappresentazione dell'operazione  **$x \text{ and } y$**  con la tavola della verità:

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>x and y</b>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

oppure

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>x and y</b>
F	F	F
V	F	F
F	V	F
V	V	V

*Proprietà:*

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot x = x$$

# OR

## Somma Logica (OR)

L'operazione di somma logica fra due (o più) variabili fornisce il valore logico 1 se e solo se **almeno una** delle variabili assume valore logico 1.

Per rappresentare la somma logica di due variabili  $x$  e  $y$  si usa la notazione:

**$x$  or  $y$**

**$x + y$**

Rappresentazione dell'operazione  **$x$  or  $y$**  con la tavola della verità:

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>x or y</b>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

oppure

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>x or y</b>
F	F	F
V	F	V
F	V	V
V	V	V

*Proprietà:*

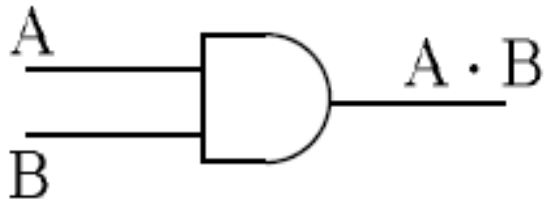
$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = 1$$

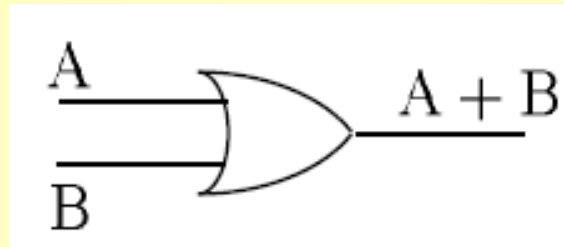
$$x + x = x$$

## Porte Logiche

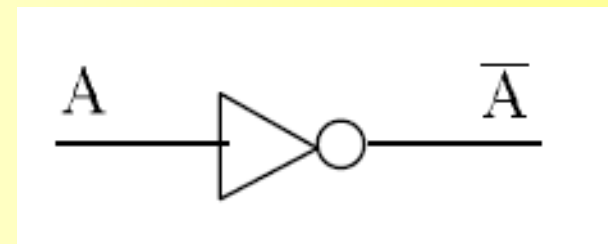
Le **porte logiche** sono dispositivi elettronici capaci di eseguire operazioni logiche su **variabili booleane**.



**A AND B**



**A OR B**



**NOT A**